التمرين 01:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

A ، B ، C ، D و Ω نقط لواحقها على الترتيب : $z_A=1+i$ ، $z_B=2-i$ ، $z_C=3+2i$ ، $z_D=5+8i$ و $z_\Omega=-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$

1- أ- أكتب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC

ب- عين طبيعة وعناصر التحويل النقطي R الذي مركزه A ويحول B إلى C

2- عين نسبة التحاكي h الذي مركزه B ويحول C إلى D

3- نضع: $S=hoR$

أ- تحقق أن $S(B)=D$

ب- ما هي طبيعة وعناصر التحويل S ؟

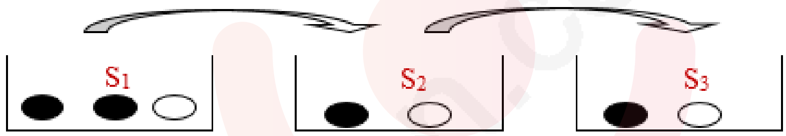
4- لتكن E ، F ، G نقط حيث: $S(D)=E$ ، $S(E)=F$ و $S(F)=G$

أ- بين أن النقط Ω ، E و B في استقامية

ب - بين أن النقط Ω ، G و B في استقامية

التمرين 02:

لدينا n كيس S_1 ، S_2 ، .... ، S_n يحوي كل منهم على قريصات غير معروفة عند اللمس. n عدد طبيعي غير معدوم.



S_1 يحوي قريصتان سوداوان وواحدة بيضاء وكل الأكياس الأخرى تحوي قريصة سوداء وقريصة بيضاء.

نقترح دراسة تطور السحوبات المتتالية لقريصة حسب البروتوكول التالي:

- نسحب قريصة من S_1:
- نضعها في S_2 ثم نسحب قريصة من S_2 :
- نضعها في S_3 و هكذا....
- من أجل كل عدد طبيعي k حيث: $1\leq k\leq n$ ، نرمز بـ E_k الحادثة " القريصة المسحوبة من S_k بيضاء" و $\overline{E_k}$ حادثته المعاكسة.
- احتمال الحادثة E_k هو p_k .

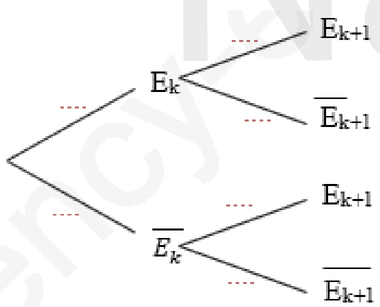
- بداية العملية:

أ - مثل بشجرة السحب في S_1 ثم في S_2.

ب - أذكر p_1 ثم أحسب p_2 .

- علاقة بين p_k و p_{k+1}:

أ - عين $p_{E_k}(E_{k+1})$ و $p_{E_k}(E_{k+1})$



ب - أتمم الشجرة المقابلة و التي تمثل السحوبات في الكيسين S_k و S_{k+1} ، $(1\leq k\leq n)$.

ج - استنتج أن: $p_{k+1}=\frac{1}{3}p_k+\frac{1}{3}$

- دراسة متتالية (p_n):

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

ب - استنتج $\lim_{n\to+\infty} p_n$

ج - ما هو التفسير العملي لهذه النتيجة؟

Nafouz

التمرين 03:

$G(-2;3;-1)$ و $D(-5;-1;0)$، $C(4;-1;1)$، $B(-1;3;2)$، $A(1;2;4)$ نقط من الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1- أ- بين أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة

ب- بين أن النقط A ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي

ج- استنتج أن G مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها

2- أ- بين أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

ب- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3- أ- أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ والطولين AB و AC

ب- استنتج القيم المضبوطة لكل من $cos\widehat{BAC}$ و $sin\widehat{BAC}$

ج- استنتج مساحة المثلث ABC ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

4- لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $4MA^2-6MB^2-MC^2=-54$

أ- عين طبيعة وعناصر (S)

ب- عين معادلتين ديكارتيتين للمستويين (P_1) و (P_2) الماسين لسطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

التمرين 04:

الجزء I : f دالة معرفة على $]-\infty;1]$ بـ : $f(x)=-1-\sqrt{1-x}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2- عين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$

3- أرسم (C_f) و (Δ)

الجزء I : (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1- مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0 ، u_1 و u_2 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء

2- ضع تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها

3- أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\le u_n\le 0$

ب- ادرس اتجاه تغير (u_n)

ج- استنتج أن (u_n) متقاربة

4- أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-3;0]$ ، $\frac{1}{4}\le f'(x)\le\frac{1}{2}$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{4}(u_n+3)\le u_{n+1}+3\le\frac{1}{2}(u_n+3)$

ج- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3\left(\frac{1}{4}\right)^n-3\le u_n\le 3\left(\frac{1}{2}\right)^n-3$

د- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 05:

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ماذا تستنتج؟

2- أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول التغيرات.

3- عين نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$

4- أكتب معدلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$

5- أنشئ (T) و (C_f)

6- باستعمال مكاملة بالتجزئة؛ أحسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=e$ ، $x=1$ و $y=0$

7- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$

التمرين 06: (خاص بالقسم 3 رياضي)

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين: 1440 و 276

2. ليكن x وَ y عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما. بين أنّ العددين $(x+y)$ وَ (xy) أوليان فيما بينهما.

3. a وَ b عددان طبيعيان غير معدومان و m المضاعف المشترك الأصغر لهما.

أ- برهن أن: $PGCD(a+b;m)=PGCD(a;b)$ حيث $PGCD$ هو القاسم المشترك الأكبر.

ب- أوجد كلُّ الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق: $a+b=276$ و $m=1440$

Nafouz

التمرين 01:

$z_A = 1 + i$ ، $z_B = 2 - i$ ، $z_C = 3+2i$ ، $z_D = 5+8i$ و $z_\Omega = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

1 - أ - كتابة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+2i-1-i}{2-i-1-i} = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2-i)(1+2i)}{5} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{21} \end{cases} \Leftarrow$ ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A

ب - طبيعة وعناصر التحويل النقطي R :

$\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{21} \end{cases} \Leftrightarrow$ C صورة B بالدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ أي $R(B)=C$

2 - تعيين نسبة التحاكي h :

h تحاكي مركزه B ونسبته k

$h(C)=D \Leftrightarrow z_D - z_B = k(z_C - z_B) \Leftrightarrow 5+8i-2+i=k(3+2i-2+i) \Leftrightarrow 3(1+3i)=k(1+3i) \Leftrightarrow k = 3$

h تحاكي مركزه B ونسبته $k = 3$

3 - نضع: $S=hoR$

أ - التحقق من أن $S(B)=D$:

$$S(B) = hoR(B) = h[R(B)] = h(C) = D$$

ب - طبيعة وعناصر التحويل S :

$S=hoR$: S تشابه مباشر مركزه ω ، نسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

لدينا: $S(B) = D \Leftrightarrow z_D - z_\omega = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_\omega) \Leftrightarrow 5 + 8i - z_\omega = 3i(2 - i - z_\omega)$

$\Leftrightarrow (-1 + 3i)z_\omega = -2 - 2i \Leftrightarrow z_\omega = \frac{-2-2i}{-1+3i} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = z_\Omega \Leftrightarrow \omega = \Omega$

S تشابه مباشر مركزه Ω ، نسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

4 - لتكن E ، F ، G نقط حيث: $S(D)=E$ ، $S(E)=F$ و $S(F)=G$

أ - تبيان أن النقط Ω ، E و B في استقامية:

لدينا: $E = S(D) = S[S(B)] = SoS(B)$

SoS: تشابه مباشر مركزه Ω ونسبته $3\times3=9$ وزاويته $2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Leftrightarrow SoS$: تحاكي مركزه Ω ونسبته -9

$SoS(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega E} = -9\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega E}$ و $\overrightarrow{\Omega B}$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow \Omega$ ، E و B في استقامية

ب - تبيان أن النقط Ω ، G و B في استقامية:

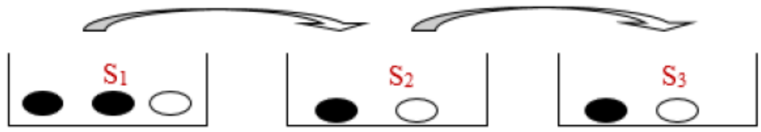
لدينا: $G = S(F) = S[S(E)] = SoS[S(D)] = SoSoS[S(B)] = SoSoSoS(B)$

$SoSoSoS$: تشابه مباشر مركزه Ω ونسبته $3^4=81$ وزاويته $4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow SoSoSoS$: تحاكي مركزه Ω ونسبته 81

$SoSoSoS(B) = G \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega G} = 81\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega G}$ و $\overrightarrow{\Omega B}$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow \Omega$ ، E و G في استقامية

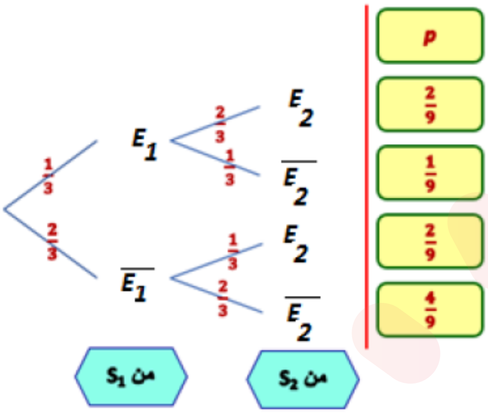
التمرين 02:

لدينا n كيس S_1، S_2، ....، S_n يحوي كل منهم على قريصات غير معروفة عند اللمس. n عدد طبيعي غير معدوم.



1 - بداية العملية:

أ - تمثيل بشجرة السحب في S_1 ، ثم في S_2:

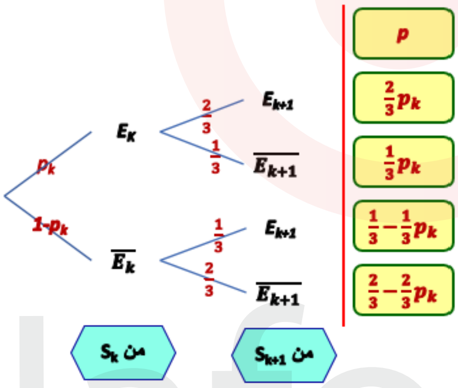


ب - أذكر p_1 ثم حساب p_2 :

$p_1=\frac{1}{3}$ و $p_2=p(E_2)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

2- علاقة بين p_k و p_{k+1}:

أ - إتمام الشجرة :



ب - استنتاج أنّ: $p_{k+1}=\frac{1}{3}p_k+\frac{1}{3}$:

لدينا: $p_{E_k}(E_{k+1})=\frac{2}{3}$ و $p_{\overline{E_k}}(E_{k+1})=\frac{1}{3}$

$P_{k+1}=p_k\times p_{E_k}(E_{k+1})+(1-p_k)\,p_{\overline{E_k}}(E_{k+1})=\frac{2}{3}p_k+\frac{1}{3}(1-p_k)=\frac{1}{3}p_k+\frac{1}{3}$ ومنه $p_{k+1}=\frac{1}{3}p_k+\frac{1}{3}$

3 - دراسة متتالية (p_n):

أ - نبرهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$:

- نتحقق من صحتها من أجل $n=1$

لدينا: $p_1=\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$ (صحيحة)

- نفرض أنها صحيحة من أجل n ولنبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي لنبرهن أن $p_{n+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right]+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+1\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$ (صحيحة)

- **الخلاصة:** من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

ب - استنتاج النهاية لـ p_n لما يؤول n إلى $+\infty$:

$\lim_{+\infty} p_n=\frac{1}{2}$

ج - التفسير العملي لهذه النتيجة:

عندما نعيد العملية عدد كبير من المرات بالقدر الكافي نجد فإن احتمال سحب كرة بيضاء يقترب من $\frac{1}{2}$

Nafouz

التمرين 03:

$G(-2;3;-1)$ و $D(-5;-1;0)$ ، $C(4;-1;1)$ ، $B(-1;3;2)$ ، $A(1;2;4)$ نقط من الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1- أ - تبيان أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة:

$\overrightarrow{AC}(3;-3;-3)$ ، $\overrightarrow{AB}(-2;1;-2)$

لدينا: $\frac{-2}{3} \neq \frac{1}{-3}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow$ A ، B و C ليست على استقامة واحدة

ب - تبيان أن النقط A ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي:

$\overrightarrow{GC}(-6;4;-2)$ ؛ $\overrightarrow{GB}(-1;0;-3)$ ؛ $\overrightarrow{GA}(-3;1;-5)$

لنعيين عددين حقيقيين α و β حيث $\overrightarrow{GA} = \alpha\overrightarrow{GB} + \beta\overrightarrow{GC}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -3 = -\alpha - 6\beta \\ 1 = 4\beta \\ -5 = -3\alpha - 2\beta \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \beta = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{3}{2} \\ -5 = -3\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) \end{cases}$

لدينا: $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GC}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GA}$ ، $\overrightarrow{GB}$ و $\overrightarrow{GC}$ مرتبطة خطيا $\Leftrightarrow$ A ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي

ج - استنتاج أن G مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها:

لدينا: $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GC}$ $\Leftrightarrow$ $4\overrightarrow{GA} - 6\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $G = \{(A,4);(B;-6);(C;-1)\}$ ..... (1)

2- أ - تبيان أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC):

$G \in (ABC) \Leftrightarrow (1)$

$\overrightarrow{DG}(3;4;-1)$

لدينا: $\begin{cases} \overrightarrow{DG}.\overrightarrow{AB} = -6 + 4 + 2 = 0 \\ \overrightarrow{DG}.\overrightarrow{AC} = 9 - 12 + 3 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \overrightarrow{DG} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DG} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DG}(3;4;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC)

لدينا: $\begin{cases} (DG) \perp (ABC) \\ G \in (ABC) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

ب - استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

$\overrightarrow{DG}(3;4;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) $\Leftrightarrow$ $(ABC): 3x+4y-z+d=0$

$A \in (ABC) \Leftrightarrow 3+8-4+d=0 \Leftrightarrow d=-7$ ومنه $(ABC): 3x+4y-z-7=0$

3- أ- حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ والطولين AB و AC:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6 - 3 + 6 = -3$ ، $AB = 3$ ، $AC = 3\sqrt{3}$

ب - استنتاج القيم المضبوطة لكل من $\cos\widehat{BAC}$ و $\sin\widehat{BAC}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$ $\Leftrightarrow$ $\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{-3}{9\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$

وبالتالي $\sin\widehat{BAC} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{BAC}} = \sqrt{1-\frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{26}{27}} = \frac{\sqrt{78}}{9}$

ج - استنتاج مساحة المثلث ABC ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$S_{ABC} = \frac{AB\times AC\times \sin\widehat{BAC}}{2} = \frac{9\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{78}}{9}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2}\,u.a.$

لدينا: $DG = \sqrt{26}$ وبالتالي $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\times S_{ABC}\times DG = \frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{26}}{2}\times\sqrt{26} = 13\,u.v.$

4- لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $4MA^2-6MB^2-MC^2=-54$

أ - تعيين طبيعة وعناصر (S):

$M \in (S) \Leftrightarrow 4MA^2-6MB^2-MC^2=-54 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}^2 - 6\overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = -54$

$\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2 - 6\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2 = -54$

$\Leftrightarrow -3MG^2 + 4GA^2 - 6GB^2 - GC^2 = -54$

$GA^2=35$ ، $GB^2=10$ ، $GC^2=56$

$M \in (S) \Leftrightarrow -3MG^2 + 140 - 60 - 56 = -54 \Leftrightarrow MG^2 = 26$

(S) سطح كرة مركزه G ونصف قطره $R = \sqrt{26}$

ب - تعيين معادلتين ديكارتيتين للمستويين (P_1) و (P_2) المماسين لسطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

$(P)//(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{DG}(3;4;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) هو ناظمي للمستوي (P) وبالتالي : $(P): 3x+4y-z+d=0$

(P) مماس لسطح الكرة $(S) \Leftrightarrow d(G;(P)) = \sqrt{26} \Leftrightarrow \frac{|7+d|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26} \Leftrightarrow d=19$ أو $d=-33$

ومنه $(P_1): 3x+4y-z+19=0$ و $(P_2): 3x+4y-z-33=0$

Nafouz

التمرين 04:

الجزء I: f دالة معرفة على $]-\infty;1]$ بـ: $f(x)=-1-\sqrt{1-x}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 - أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

ب - دراسة اتجاه تغير الدالة f

f تقبل الاشتقاق على $]-\infty;1[$ و $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}>0 \Leftrightarrow$ f متزايدة تماما على $]-\infty;1]$

جدول تغيرات f: $f(1)=-1$

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ $+\infty$

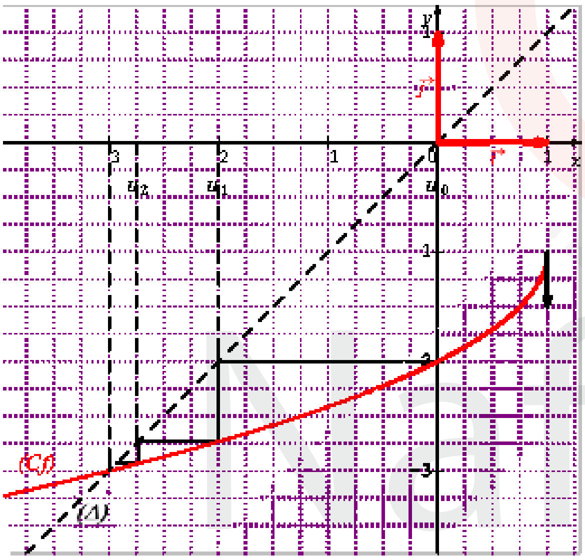
2 - تعيين إحداثيي نقطة التقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-\sqrt{1-x}=x \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x}=-x-1 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1\ge 0 \\ 1-x=x^2+2x+1 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x^2+3x=0 \\ y=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$$

إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ هي $(-3;-3)$

3 - رسم (C_f) و (Δ)



الجزء II:
$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n)=-1-\sqrt{1-u_n} \end{cases}$$

1 - تخمين حول تغيرات (u_n) وتقاربها:

(u_n) متناقصة تماما

(u_n) متقاربة وتقارب -3

2 - أ – البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\le u_n\le 0$:

- نتحقق من أنها صحيحة من أجل $n=0$

لدينا: $u_0=0\in[-3;0]$ (صحيحة)

- نفرض أنها صحيحة من أجل n أي نفرض أن $-3\le u_n\le 0$
- نبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي نبرهن أن $-3\le u_{n+1}\le 0$

دينا: $-3\le u_n\le 0 \Leftrightarrow f(-3)\le f(u_n)\le f(0)$

(لأن f متزايدة على $[-3;0]$)

$\Leftrightarrow -3\le u_{n+1}\le -2\le 0$

$\Leftarrow -3\le u_{n+1}\le 0$ (صحيحة)

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\le u_n\le 0$

ب – دراسة اتجاه تغير (u_n)

(C_f) يقع تحت (Δ) على $[-3;0] \Leftrightarrow (-3\le x\le 0 \Rightarrow f(x)\le x)$

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}; -3\le u_n\le 0 \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}; f(u_n)\le u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1}\le u_n$

$\Leftrightarrow$ (u_n) متناقصة تماما

ج – استنتاج أن (u_n) متقاربة

لدينا: $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}; -3\le u_n\le 0 \\ (u_n) \text{ متناقصة تماما} \\ f(-3)=-3 \end{cases} \Rightarrow$ (u_n) متقاربة وتقارب -3 أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-3$

4 - أ – تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-3;0]$ ، $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

لدينا: $-3 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 1-x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1-x} \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2\sqrt{1-x} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ من أجل كل عدد حقيقي x من $[-3;0]$ ، $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

ب – استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{4}(u_n+3) \leq u_{n+1}+3 \leq \frac{1}{2}(u_n+3)$:

لدينا: $\begin{cases} \forall x \in [-3;0];\ \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \int_{-3}^{u_n} \frac{1}{4}dx \leq \int_{-3}^{u_n} f'(x)dx \leq \int_{-3}^{u_n} \frac{1}{2}dx$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n+3) \leq [f(x)]_{-3}^{u_n} \leq \frac{1}{2}(u_n+3)$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n+3) \leq f(u_n)-f(-3) \leq \frac{1}{2}(u_n+3)$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n+3) \leq u_{n+1}+3 \leq \frac{1}{2}(u_n+3)$

ج – استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$:

من السؤال السابق نجد:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(u_0+3) \leq u_1+3 \leq \frac{1}{2}(u_0+3) \\ \frac{1}{4}(u_1+3) \leq u_2+3 \leq \frac{1}{2}(u_1+3) \\ \frac{1}{4}(u_2+3) \leq u_3+3 \leq \frac{1}{2}(u_2+3) \\ \dots\dots. \\ \frac{1}{4}(u_{n-1}+3) \leq u_n+3 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1}+3) \end{cases}$$

بالضرب نجد:

$\forall n \in \mathbb{N}; \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0+3) \leq u_n+3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0+3) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n+3 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$

د - استنتاج $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N};\ 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \\ \lim_{n\to+\infty} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\right] = -3 \\ \lim_{n\to+\infty} \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\right] = -3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -3$

Nafouz

التمرين 05:

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- حساب النهايات: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

الاستنتاج: $x=0$ و $y=0$ معادلتين لمقاربين للمنحنى (C_f)

2- دراسة اتجاه تغير f :

f تقبل الاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{2x-4x\ln x}{x^4}=\frac{2-4\ln x}{x^3}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	

f متزايدة تماما على $]0;\sqrt{e}]$ ومتناقصة تماما على $[\sqrt{e};+\infty[$

جدول التغيرات:

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

3- نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$:

$$\begin{cases} y=f(x)\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\ln x}{x^2}=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\\ y=0\end{cases}$$

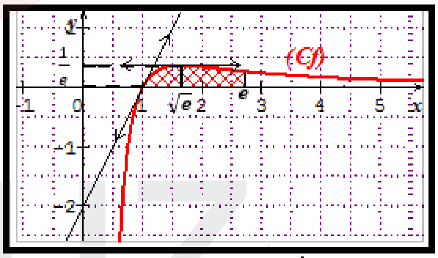
إحداثيتي نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$ هي $(1;0)$

4- معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$:

$f(1)=0$ و $f'(1)=2$

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow (T): y=2x-2$

5- إنشاء (T) و (C_f):



6- حساب المساحة:

$$\mathcal{A}=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{2\ln x}{x^2}\,dx$$

نضع: $\begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=-\frac{2}{x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x)=\ln x\\ v'(x)=\frac{2}{x^2}\end{cases}$

$$\mathcal{A}=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e+\int_1^e \frac{2}{x^2}\,dx=\left[-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}\right]_1^e=\left(-\frac{4}{e}+2\right)u.a.\cong 0{,}53u.a.$$

7- المناقشة:

$(\Delta): y=f(m)$

$(x'x): y=0$

$(\Delta'): y=\frac{1}{e}$

من البيان نستنتج ما يلي:

$f(m)\leq 0 \Leftrightarrow 0<m\leq 1$: حل وحيد

$0<f(m)<\frac{1}{e} \Leftrightarrow m\in\,]1;\sqrt{e}[\,\cup\,]\sqrt{e};+\infty[$: حلان متمايزان

$f(m)=\frac{1}{e} \Leftrightarrow m=\sqrt{e}$: حل مضاعف

التمرين 06:

1.حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين: 1440 و276 :

لدينا: $\begin{cases}276 = 12 \times 23 \\ 1440 = 12 \times 120 \\ PGCD(23;120) = 1\end{cases} \Leftrightarrow PGCD(276;1440) = 12$

2.تبيان أنّ العددين $(x+y)$ و(xy) أوليان فيما بينهما:

x وَ y عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما

لدينا: $x \wedge y = 1 \Leftrightarrow$ يوجد عددان صحيحان α و β حيث: $\alpha x + \beta y = 1$ (مبرهنة بيزو)

$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha(x+y) + (\beta - \alpha)y = 1 \\ \beta(x+y) + (\alpha - \beta)x = 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y) \wedge y = 1 \\ (x+y) \wedge x = 1\end{cases}$ (مبرهنة بيزو)

$\Leftrightarrow (x+y) \wedge (xy) = 1$

3. a وَ b عددان طبيعيان غير معدومان و m المضاعف المشترك الأصغر لهما.

أ – برهان على أن: $PGCD(a+b;m) = PGCD(a;b)$:

نضع: $PGCD(a;b) = d \Leftrightarrow \begin{cases}a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD(a';b') = 1\end{cases}$

لدينا: $md = ab = d^2a'b' \Leftrightarrow m = d\,a'\,b'$

$PGCD(a+b;m) = PGCD(d(a'+b');da'b') = d\,PGCD(a'+b';a'b') = d = PGCD(a;b)$

(لأن $(a'+b') \wedge (a'b') = 1$ من السؤال السابق)

ب - إيجاد$(a;b)$:

$a+b = 276$ وَ $m = 1440$

$PGCD(a;b) = PGCD(a+b;m) = PGCD(276;1440) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases}a = 12a' \\ b = 12b' \\ PGCD(a';b') = 1\end{cases}$

لدينا: $m = d\,a'\,b' \Leftrightarrow 12a'b' = 1440 \Leftrightarrow a'b' = 120$

و $a + b = 12(a'+b') = 276 \Leftrightarrow a' + b' = 23$

a' و b' هما حلا المعادلة: $x^2 - 23x + 120 = 0$

$\Delta = 23^2 - 4(120) = 49$ $x_1 = 15$ ، $x_2 = 8$

وبالتالي $(a';b') = (8;15)$ أو $(a';b') = (15;8) \Leftrightarrow (a;b) = (96;180)$ أو $(a;b) = (180;96)$